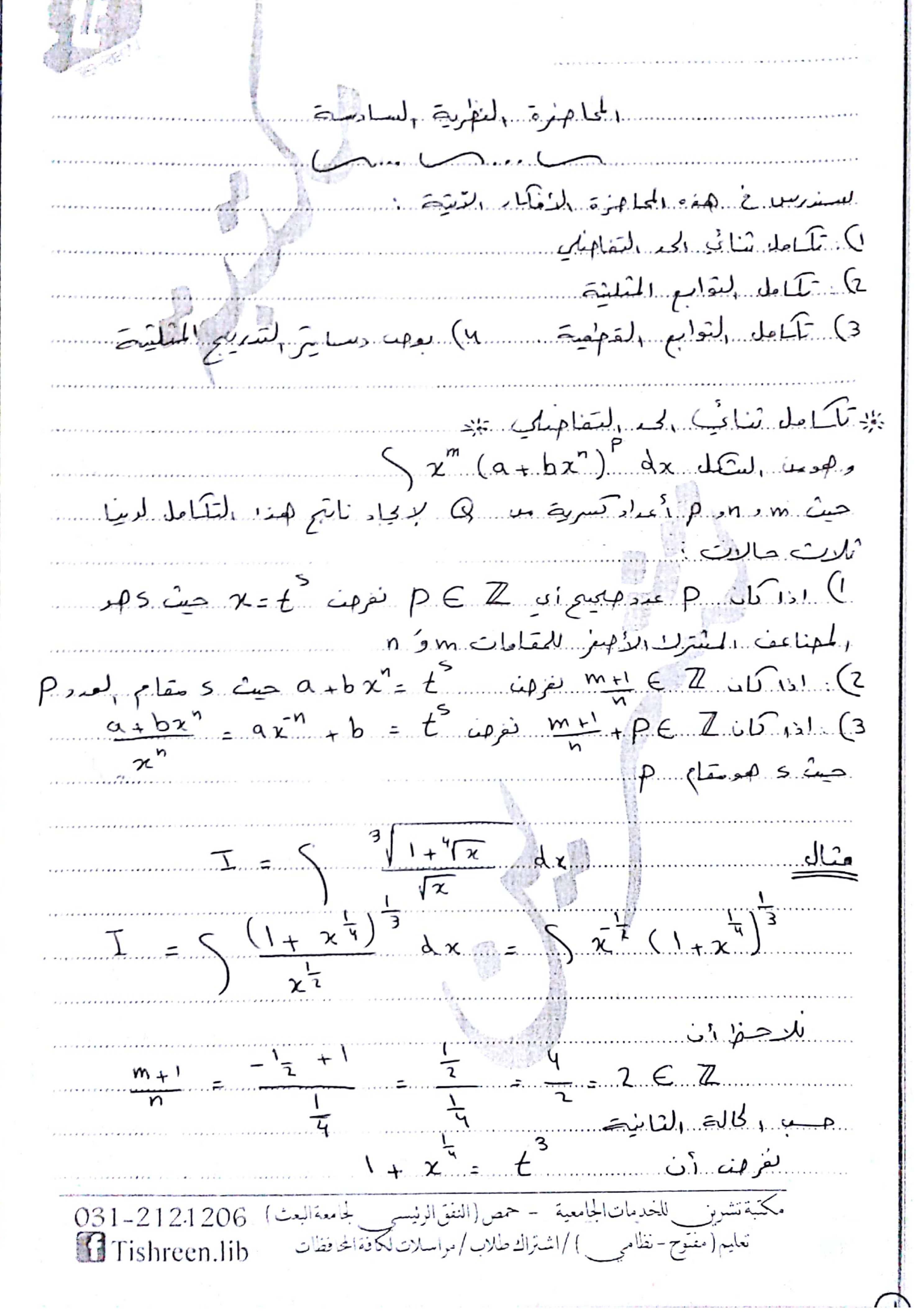


المحاضرة النظرية السادسة

سندرس في هذه المحاضرة الأفكار الآتية:

1) تكامل ثنائي الحد التفاضلي
2) تكامل التوابع المثلثية
3) تكامل التوابع القوسية 4) بعض دساتير التحويل المثلثية

تكامل ثنائي الحد التفاضلي:

وهو من الشكل $\int x^m (a+bx^n)^p \, dx$

حيث m و n و p أعداد كسرية من $\mathbb{Q}$ لإيجاد ناتج هذا التكامل لدينا ثلاث حالات:

1) اذا كان p عدد صحيح أي $p \in \mathbb{Z}$ نفرض $x = t^s$ حيث s هو المضاعف المشترك الأصغر للمقامات m و n

2) اذا كان $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ نفرض $a + bx^n = t^s$ حيث s مقام العدد p

3) اذا كان $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$ نفرض $\frac{a+bx^n}{x^n} = ax^{-n} + b = t^s$ حيث s هو مقام p

مثال

$$I = \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$$

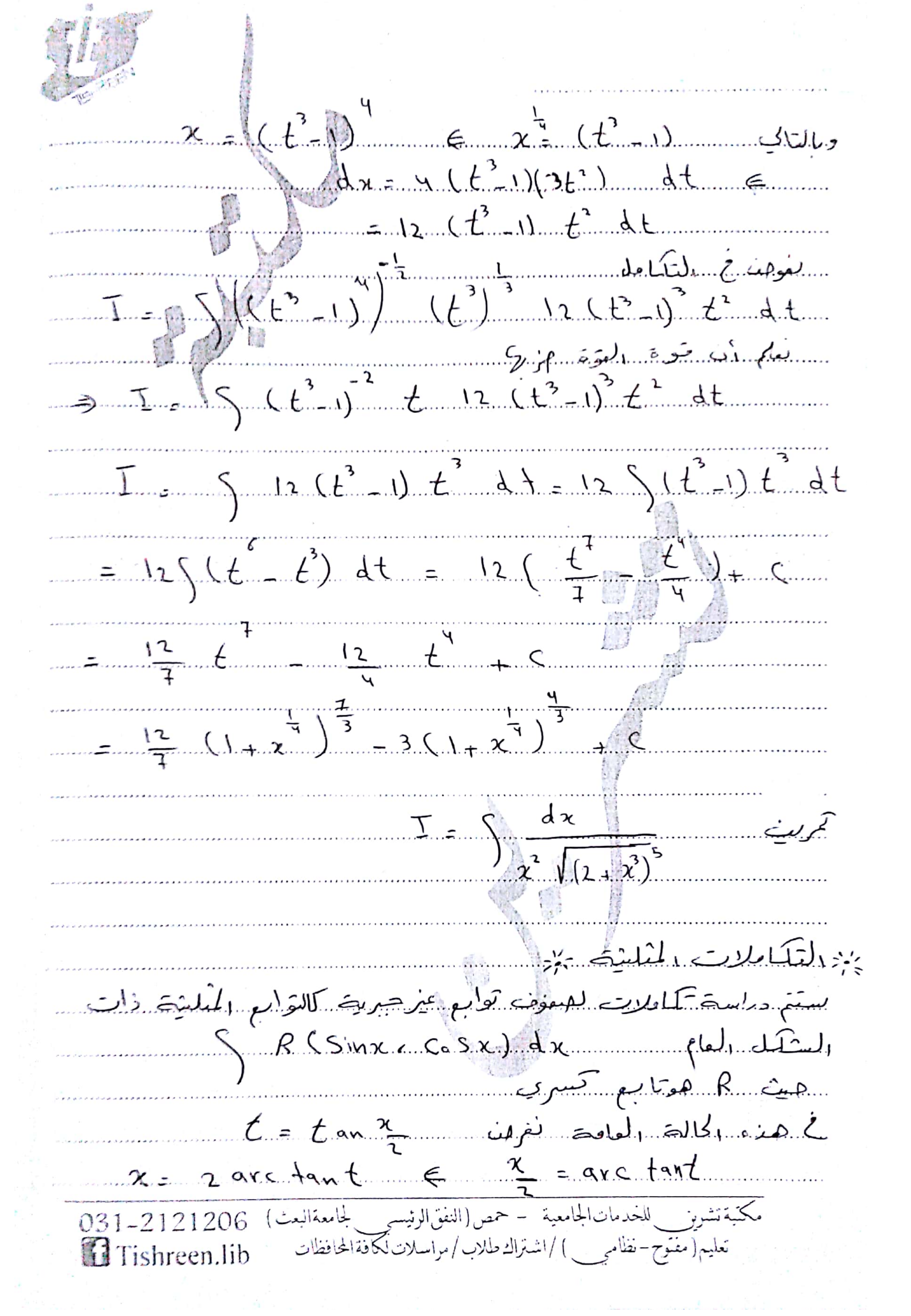
$$I = \int \frac{(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}} \, dx = \int x^{-\frac{1}{2}} (1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}$$

نلاحظ أن

$$\frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{2} = 2 \in \mathbb{Z}$$

حسب الحالة الثانية

نفرض أن $1 + x^{\frac{1}{4}} = t^3$



وبالتالي $x^{\frac{1}{4}} = (t^3-1) \Leftarrow x = (t^3-1)^4$

$\Leftarrow dx = 4(t^3-1)(3t^2)\,dt$

$= 12(t^3-1)\,t^2\,dt$

نعوض في التكامل

$$I = \int \left((t^3-1)^4\right)^{-\frac{1}{2}} (t^3)^{\frac{1}{3}}\, 12(t^3-1)^3 t^2\,dt$$

نعلم أن قوة القوة نضرب

$$\Rightarrow I = \int (t^3-1)^{-2}\, t\, 12(t^3-1)^3 t^2\,dt$$

$$I = \int 12(t^3-1)t^3\,dt = 12\int (t^3-1)t^3\,dt$$

$$= 12\int (t^6 - t^3)\,dt = 12\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4}\right) + c$$

$$= \frac{12}{7}t^7 - \frac{12}{4}t^4 + c$$

$$= \frac{12}{7}(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{7}{3}} - 3(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{4}{3}} + c$$

تمرين $I = \int \dfrac{dx}{x^2\sqrt{(2+x^3)^5}}$

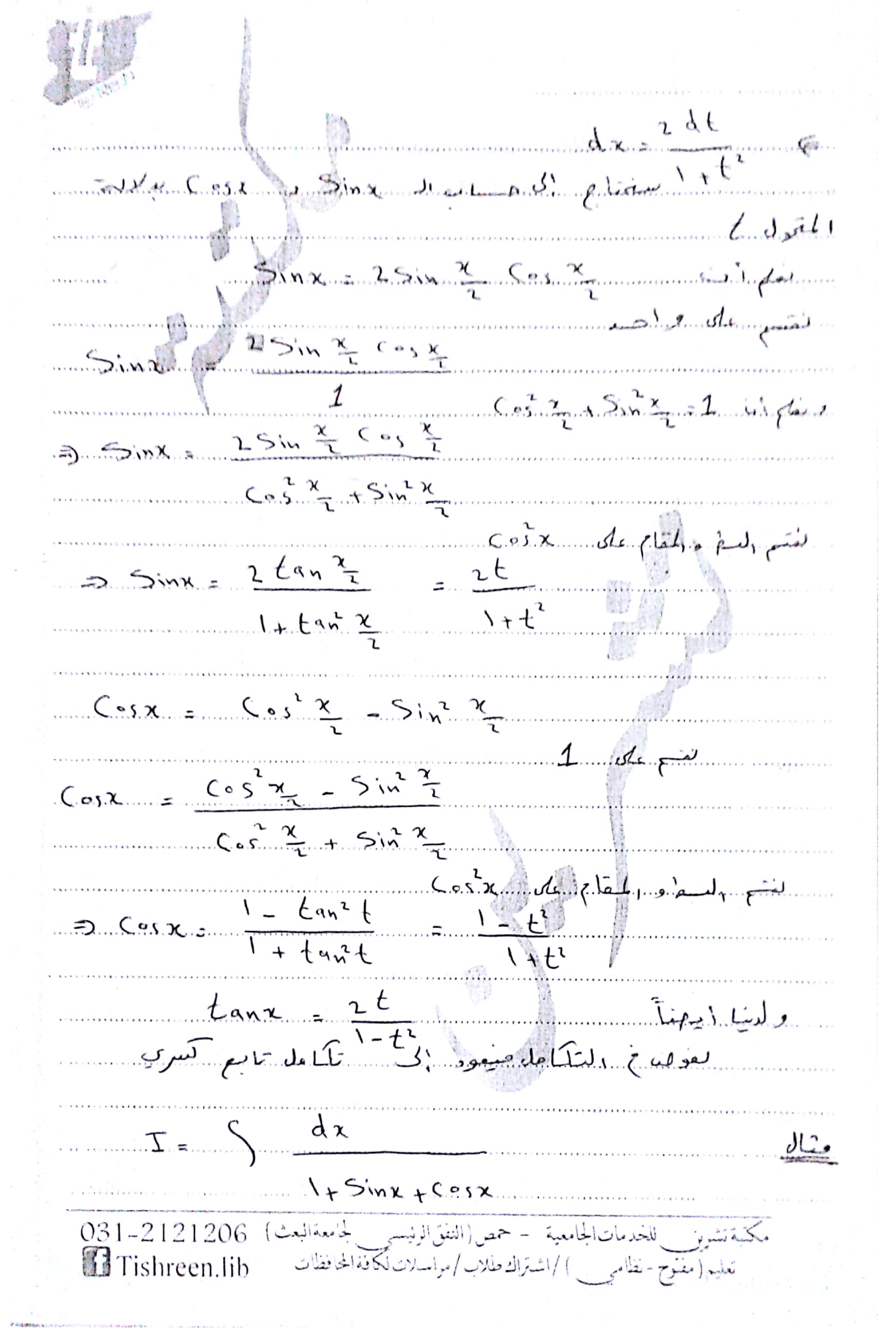
☼ التكاملات المثلثية ☼

يتم دراسة تكاملات لصنوف توابع غير جبرية كالتوابع المثلثية ذات الشكل العام $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$

حيث R هو تابع كسري

في هذه الحالة العامة نفرض $t = \tan\frac{x}{2}$

$\frac{x}{2} = \arctan t \Leftarrow x = 2\arctan t$



$$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

نستطيع أن نحسب الـ $\sin x$ و $\cos x$ بدلالة المتحول t

نعلم أن $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

نقسم على واحد

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1}$$

ونعلم أن $\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} = 1$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}}$$

نقسم البسط والمقام على $\cos^2 x$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$$

نقسم على 1

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}}$$

نقسم البسط والمقام على $\cos^2 x$

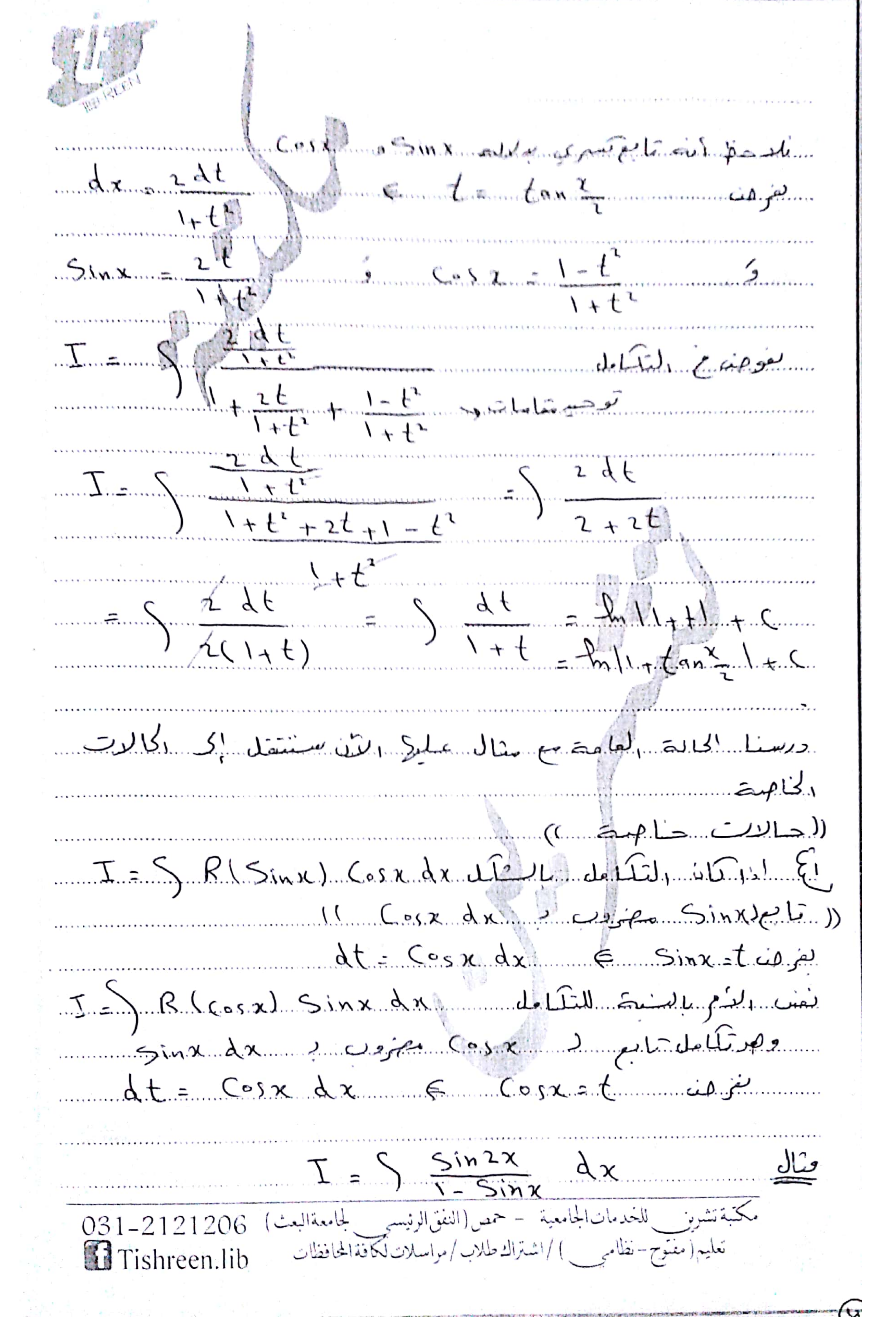
$$\Rightarrow \cos x = \frac{1-\tan^2 t}{1+\tan^2 t} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

ولدينا أيضاً $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$

نعوض في التكامل فيعود إلى تكامل تابع كسري

مثال

$$I = \int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$$



نلاحظ أنه تابع كسري بدلالة $\sin x$ و $\cos x$

نفرض $t=\tan\frac{x}{2}$ ⇐ $dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}$

و $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ ، $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$

نعوض في التكامل

$$I=\int\frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

توحيد مقامات

$$I=\int\frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{1+t^2+2t+1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2\,dt}{2+2t}$$

$$=\int\frac{2\,dt}{2(1+t)}=\int\frac{dt}{1+t}=\ln|1+t|+c$$

$$=\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+c$$

درسنا الحالة العامة مع مثال عليها الآن سننتقل إلى الحالات الخاصة

((حالات خاصة))

1) إذا كان التكامل بالشكل $I=\int R(\sin x)\cos x\,dx$

((تابع لـ $\sin x$ مضروب بـ $\cos x\,dx$))

نفرض $\sin x=t$ ⇐ $dt=\cos x\,dx$

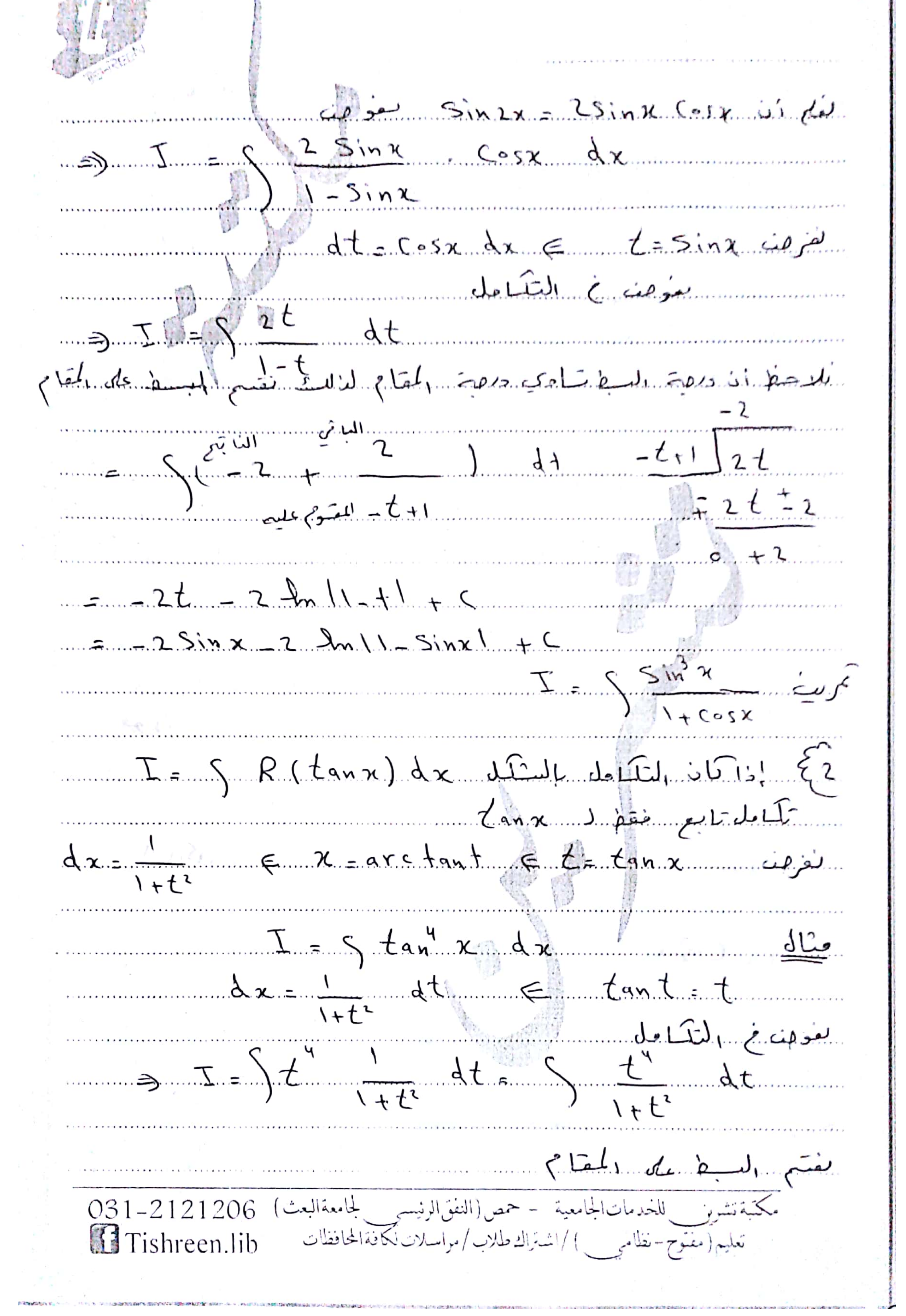
نفس الأمر بالنسبة للتكامل $I=\int R(\cos x)\sin x\,dx$

وهو تكامل تابع لـ $\cos x$ مضروب بـ $\sin x\,dx$

نفرض $\cos x=t$ ⇐ $dt=\cos x\,dx$

مثال

$$I=\int\frac{\sin 2x}{1-\sin x}\,dx$$



لنعلم أن $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ نعوض

$$\Rightarrow I = \int \frac{2\sin x}{1-\sin x} \cdot \cos x \, dx$$

نفرض $t = \sin x \Leftarrow dt = \cos x \, dx$

نعوض في التكامل

$$\Rightarrow I = \int \frac{2t}{1-t} \, dt$$

نلاحظ أن درجة البسط تساوي درجة المقام لذلك نقسم البسط على المقام

$$= \int \left(-2 + \frac{2}{-t+1} \right) dt$$

(الناتج: -2 ، الباقي: 2 ، المقسوم عليه: $-t+1$)

$$\begin{array}{r} -2 \\ -t+1 \overline{) \; 2t \quad} \\ \mp 2t \pm 2 \\ \hline 0 \; +2 \end{array}$$

$$= -2t - 2\ln|1-t| + c$$

$$= -2\sin x - 2\ln|1-\sin x| + c$$

تمرين: $I = \int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}$

2) إذا كان التكامل بالشكل $I = \int R(\tan x)\, dx$ تكامل تابع فقط لـ $\tan x$

نفرض $t = \tan x \Leftarrow x = \arctan t \Leftarrow dx = \frac{1}{1+t^2}$

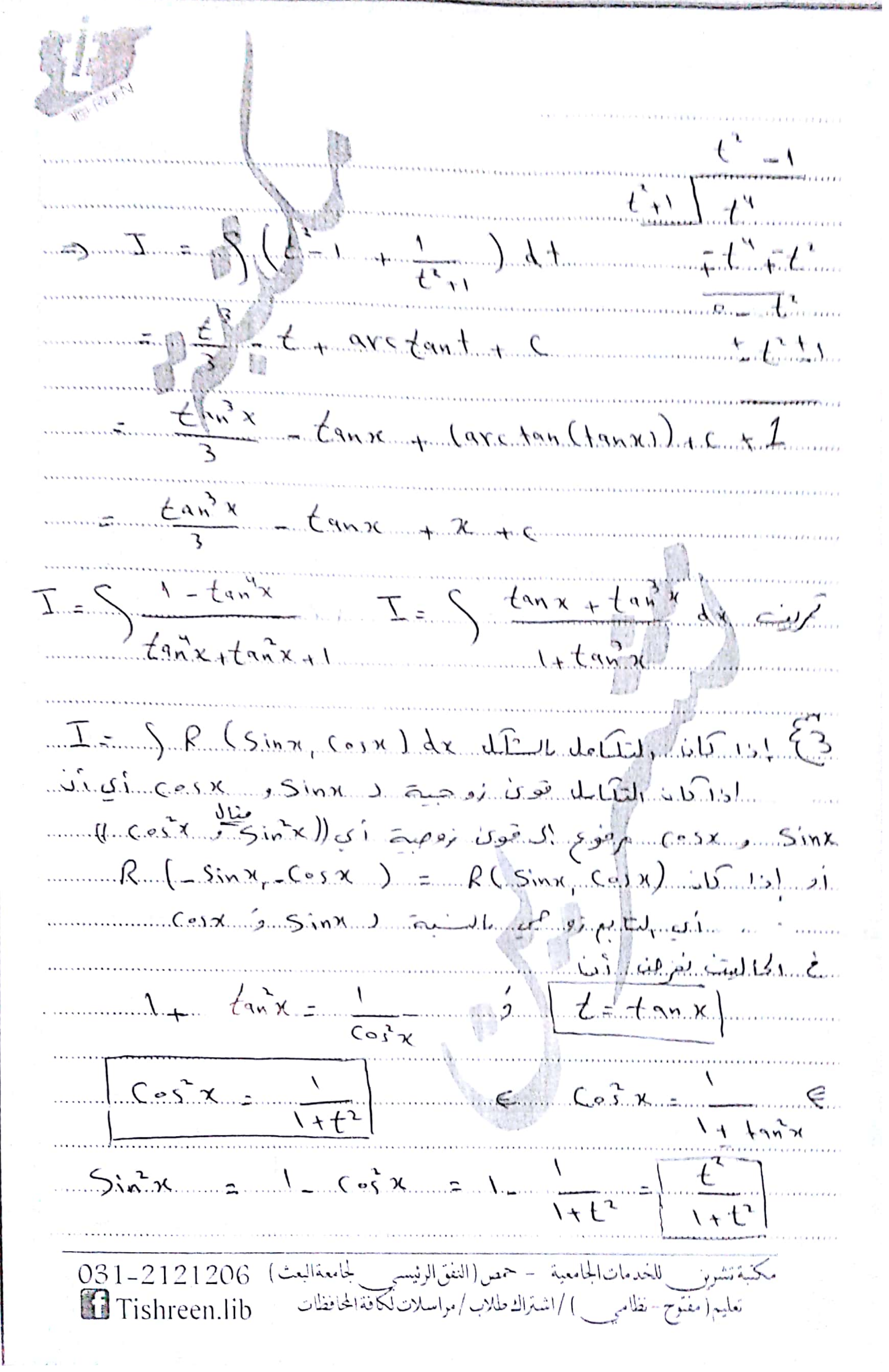
مثال $I = \int \tan^4 x \, dx$

$\tan t = t \Leftarrow dx = \frac{1}{1+t^2} \, dt$

نعوض في التكامل

$$\Rightarrow I = \int t^4 \frac{1}{1+t^2} \, dt = \int \frac{t^4}{1+t^2} \, dt$$

نقسم البسط على المقام



$$\begin{array}{r|l} t^2 - 1 & \\ \hline t^4 & t^2+1 \\ \mp t^4 \mp t^2 & \\ \hline 0 - t^2 & \\ \pm t^2 \pm 1 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$\Rightarrow I = \int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1}\right) dt$$

$$= \frac{t^3}{3} - t + \arctan t + c$$

$$= \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + (\arctan(\tan x)) + c$$

$$= \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + c$$

تمرين: $I = \int \frac{\tan x + \tan^3 x}{1 + \tan^3 x} dx$ ، $I = \int \frac{1 - \tan^4 x}{\tan^4 x + \tan^2 x + 1}$

(3) إذا كان التكامل بالشكل $I = \int R(\sin x, \cos x)\, dx$

إذا كان التكامل قوى زوجية لـ $\sin x$ و $\cos x$ أي أن

$\sin x$ و $\cos x$ مرفوع إلى قوى زوجية أي (($\sin^2 x$ و $\cos^2 x$ مثال))

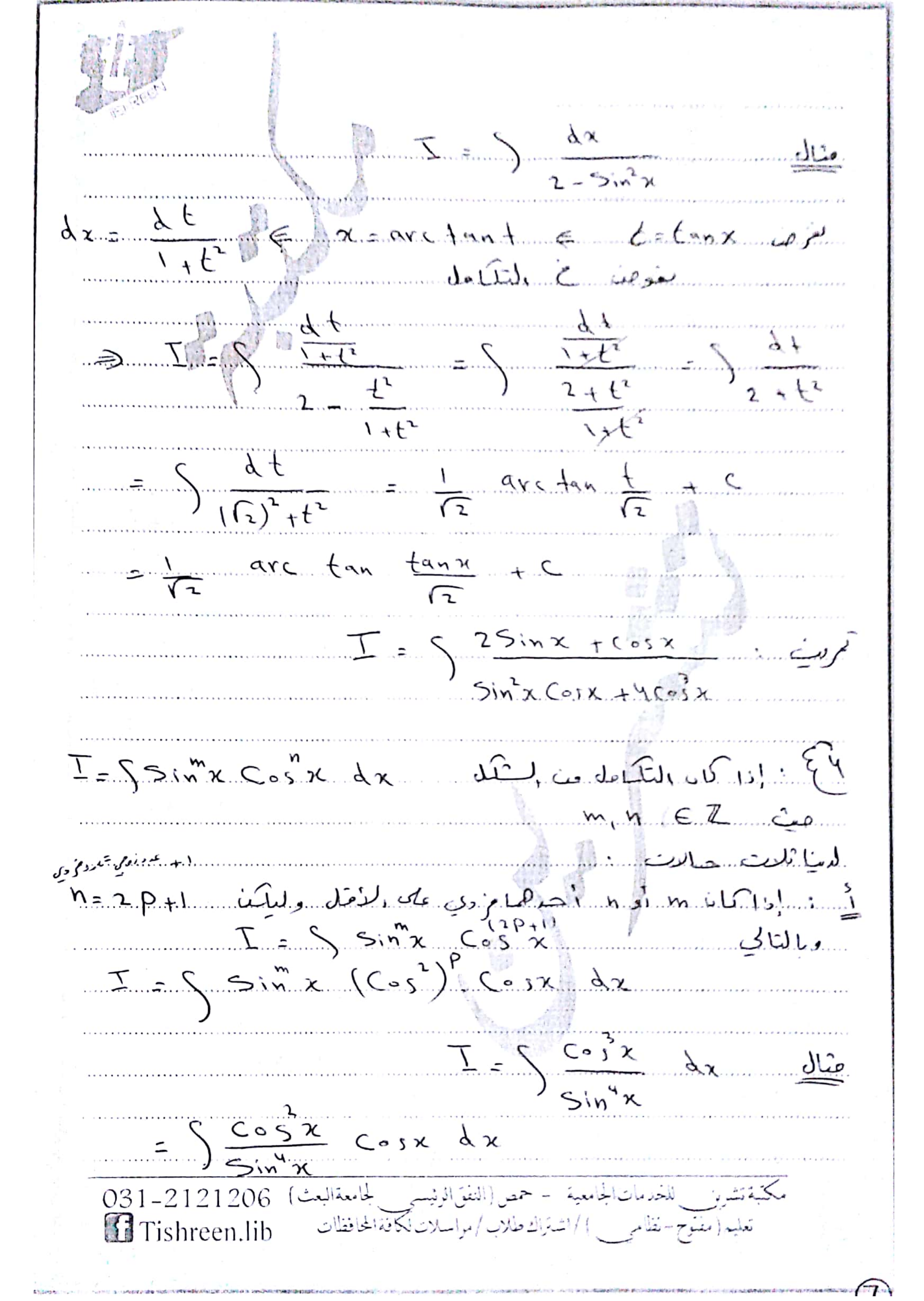
أو إذا كان $R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x)$

أي التابع زوجي بالنسبة لـ $\sin x$ و $\cos x$

في الحالتين نفرض أن $\boxed{t = \tan x}$ و $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$$\Leftarrow \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} \Leftarrow \boxed{\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}}$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \boxed{\frac{t^2}{1+t^2}}$$



مثال

$$I = \int \frac{dx}{2-\sin^2 x}$$

نفرض $t = \tan x \Leftarrow x = \arctan t \Leftarrow dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$

نعوض في التكامل

$$\Rightarrow I = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{2-\frac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{2+t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{2+t^2}$$

$$= \int \frac{dt}{(\sqrt{2})^2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2}} + c$$

تمرين:

$$I = \int \frac{2\sin x + \cos x}{\sin^2 x \cos x + 4\cos^3 x}$$

ع٤: إذا كان التكامل من الشكل $I = \int \sin^m x \cos^n x \, dx$

حيث $m, n \in \mathbb{Z}$

لدينا ثلاث حالات:

1 + عدد زوجي = عدد فردي

أ: إذا كان m أو n أحدهما فردي على الأقل وليكن $n = 2p+1$

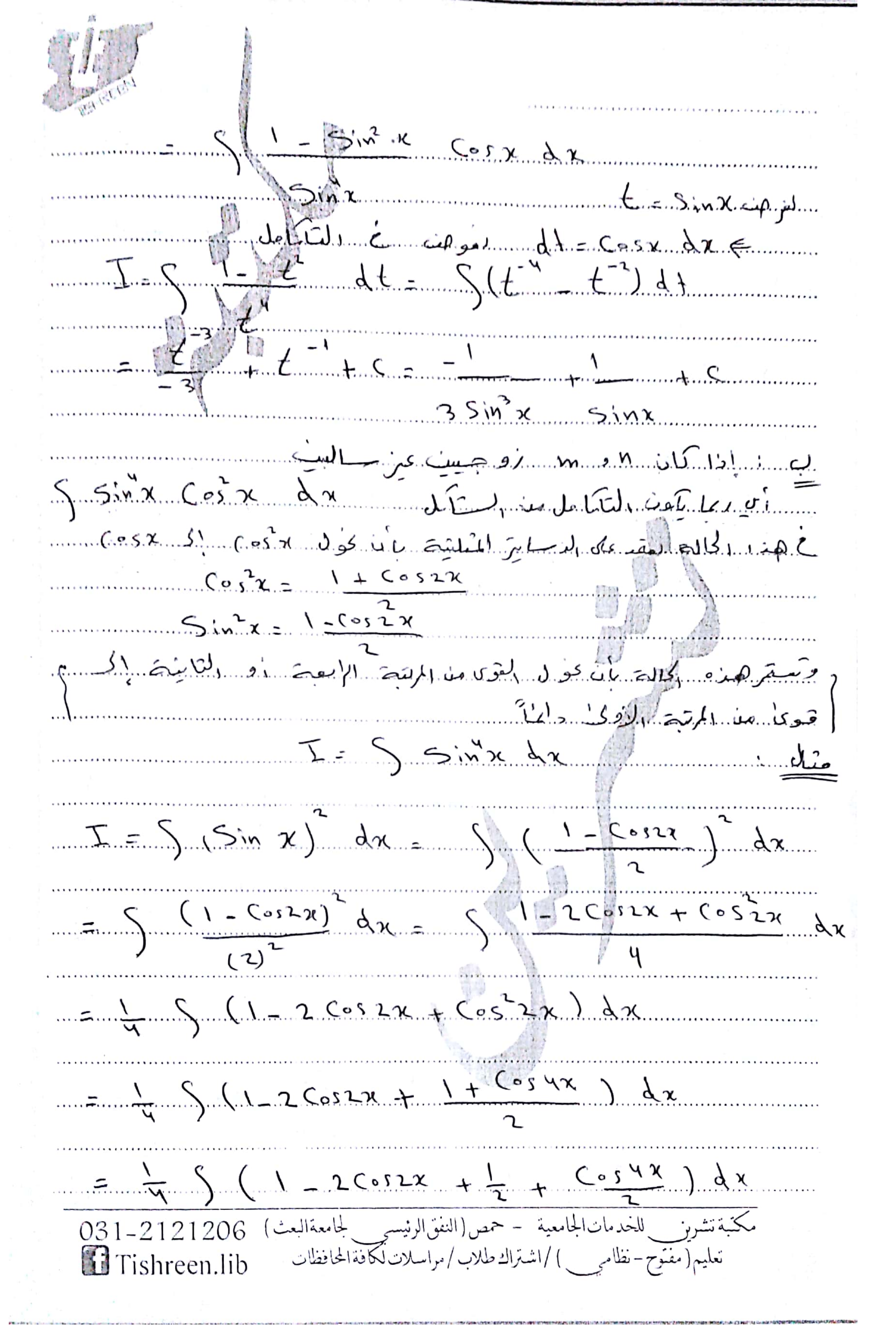
وبالتالي $I = \int \sin^m x \cos^{(2p+1)} x$

$$I = \int \sin^m x \, (\cos^2)^p \cos x \, dx$$

مثال

$$I = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$$

$$= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} \cos x \, dx$$



$$= \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^4 x} \cos x \, dx$$

لنفرض $t = \sin x$

$\Leftarrow dt = \cos x \, dx$ نعوض في التكامل

$$I = \int \frac{1-t^2}{t^4} dt = \int (t^{-4} - t^{-2}) dt$$

$$= \frac{t^{-3}}{-3} + t^{-1} + c = \frac{-1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + c$$

ب : إذا كان n و m زوجيين غير سالبين

أي ربما يكون التكامل من الشكل $\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx$

في هذه الحالة نعتمد على الدساتير المثلثية بأن نحول $\cos^2 x$ إلى $\cos x$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

وتستمر هذه الحالة بأن نحول القوى من المرتبة الرابعة أو الثانية إلى قوى من المرتبة الأولى دائماً

مثال : $I = \int \sin^4 x \, dx$

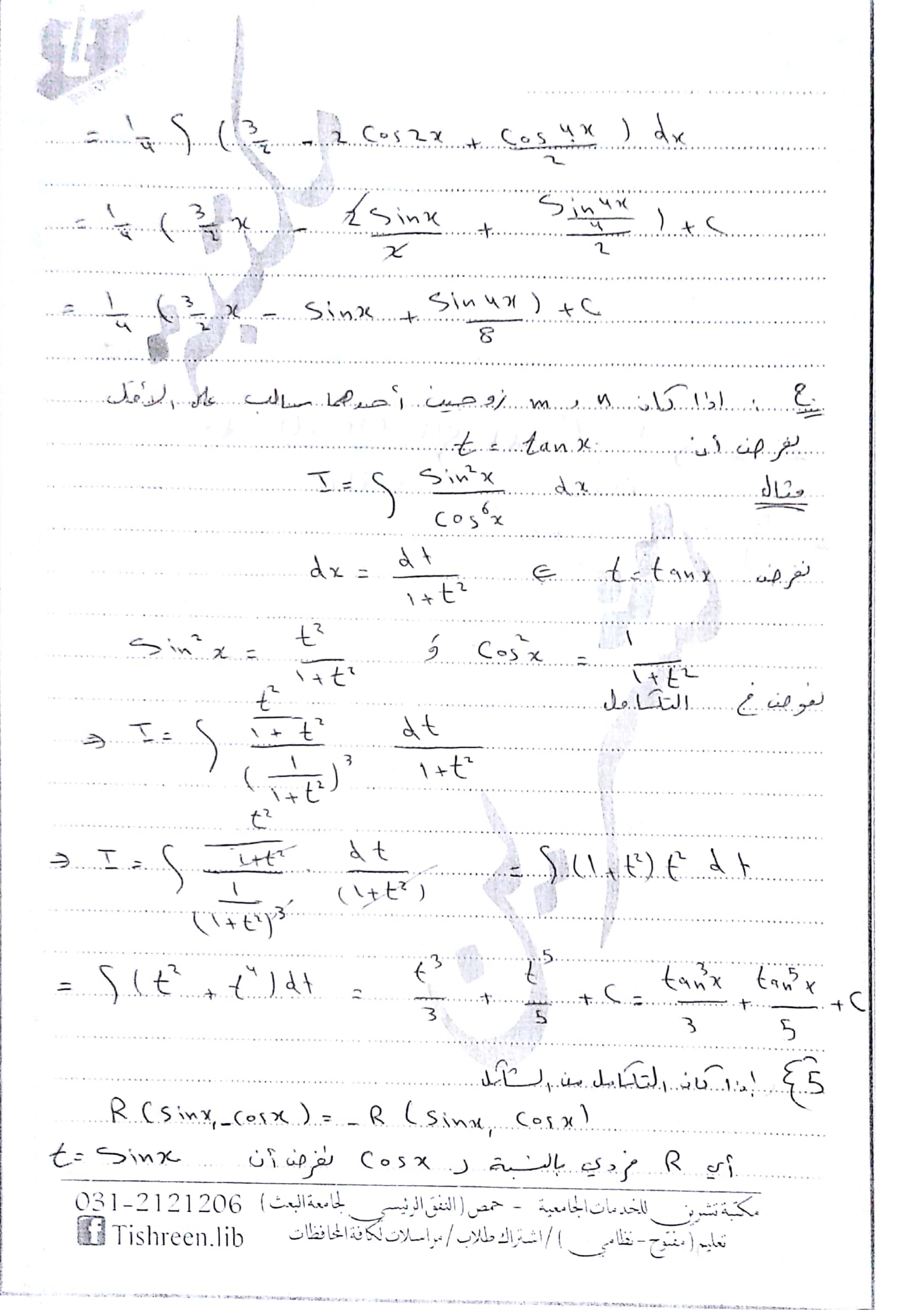
$$I = \int (\sin x)^2 dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \int \frac{(1-\cos 2x)^2}{(2)^2} dx = \int \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} dx$$

$$= \frac{1}{4} \int (1-2\cos 2x + \cos^2 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \left(1-2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{\cos 4x}{2}\right) dx$$



$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{\cos 4x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x - \frac{2\sin x}{x} + \frac{\frac{\sin 4x}{4}}{2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x - \sin x + \frac{\sin 4x}{8}\right) + C$$

٤: إذا كان n و m زوجيين أحدهما سالب على الأقل

نفرض أن $t = \tan x$

مثال $I = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$

نفرض $t = \tan x \Leftarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$

$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$ و $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$

نعوض في التكامل

$$\Rightarrow I = \int \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^3} \frac{dt}{1+t^2}$$

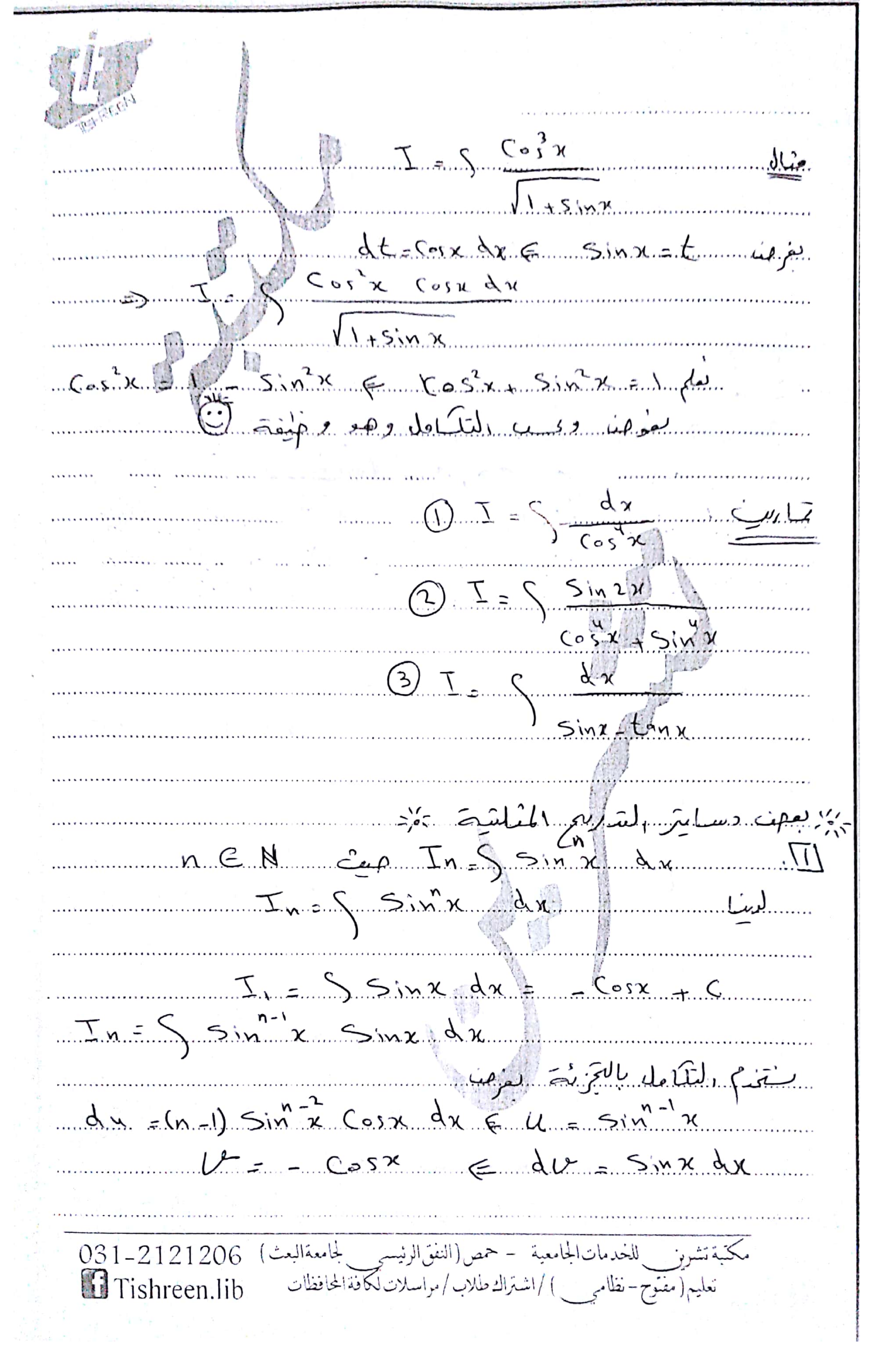
$$\Rightarrow I = \int \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{1}{(1+t^2)^3}} \frac{dt}{(1+t^2)} = \int (1+t^2)\, t^2 \, dt$$

$$= \int (t^2 + t^4)\, dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} + C$$

٥: إذا كان التكامل من الشكل

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

أي R فردي بالنسبة لـ $\cos x$ نفرض أن $t = \sin x$



مثال:

$$I = \int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{1+\sin x}}$$

نفرض $\sin x = t \Leftarrow dt = \cos x \, dx$

$$\Rightarrow I = \int \frac{\cos^2 x \, \cos x \, dx}{\sqrt{1+\sin x}}$$

نعلم $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Leftarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

نعوض ونحسب التكامل وهو وظيفة ☺

تمارين:

① $I = \int \frac{dx}{\cos^4 x}$

② $I = \int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x}$

③ $I = \int \frac{dx}{\sin x - \tan x}$

☼ بعض دساتير التدريج المثلثية ☼

[1] $I_n = \int \sin^n x \, dx$ حيث $n \in \mathbb{N}$

لدينا $I_n = \int \sin^n x \, dx$

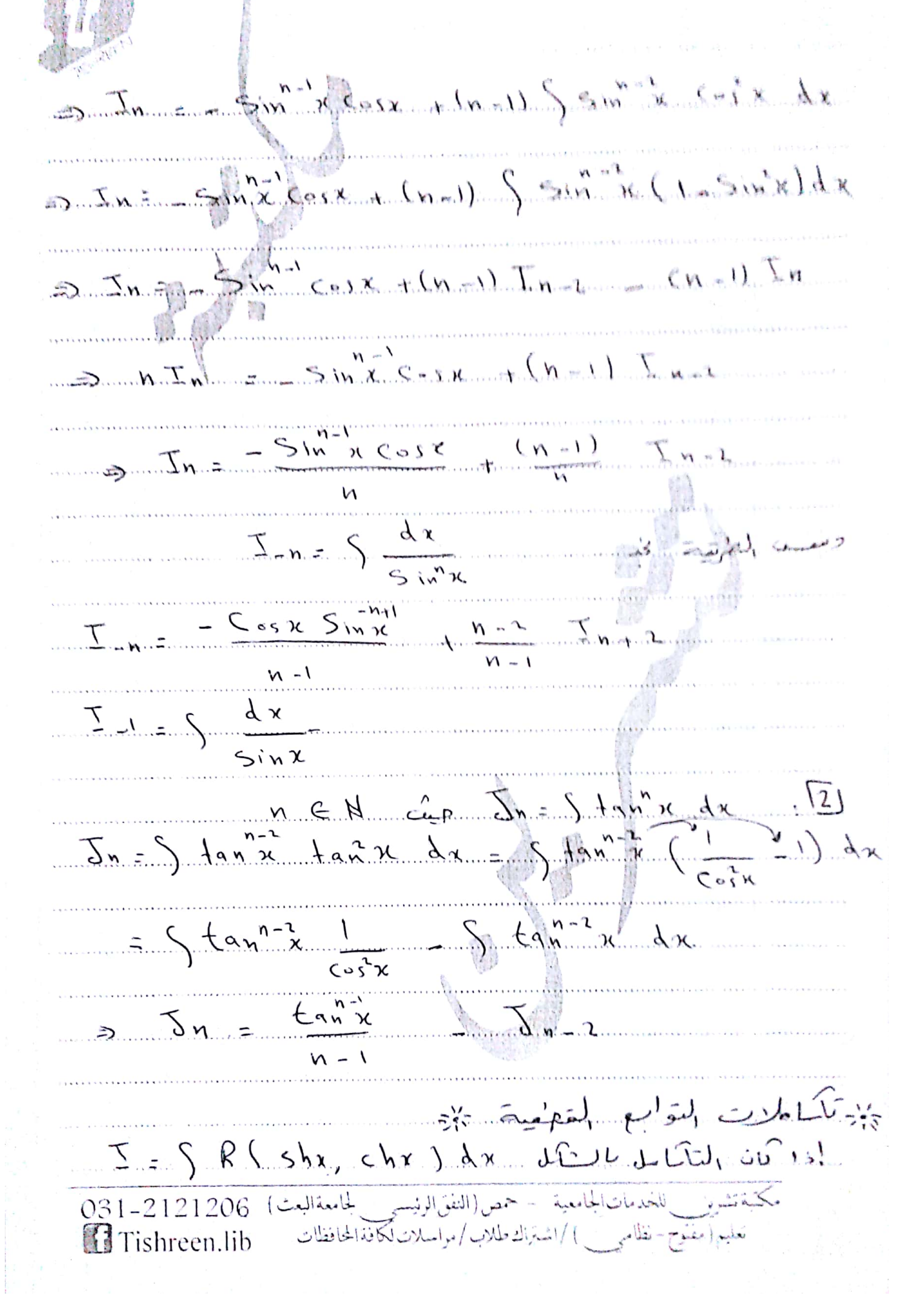
$$I_1 = \int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$I_n = \int \sin^{n-1} x \, \sin x \, dx$$

نستخدم التكامل بالتجزئة نفرض

$u = \sin^{n-1} x \Leftarrow du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x \, dx$

$dv = \sin x \, dx \Leftarrow v = -\cos x$



⇒ $I_n = -\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx$

⇒ $I_n = -\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\,dx$

⇒ $I_n = -\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$

⇒ $nI_n = -\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)I_{n-2}$

⇒ $I_n = \frac{-\sin^{n-1}x\cos x}{n} + \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}$

وبنفس الطريقة نجد: $I_{-n} = \int \frac{dx}{\sin^n x}$

$I_{-n} = \frac{-\cos x \sin^{-n+1}x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} I_{-n+2}$

$I_{-1} = \int \frac{dx}{\sin x}$

2) $J_n = \int \tan^n x\,dx$ حيث $n \in N$

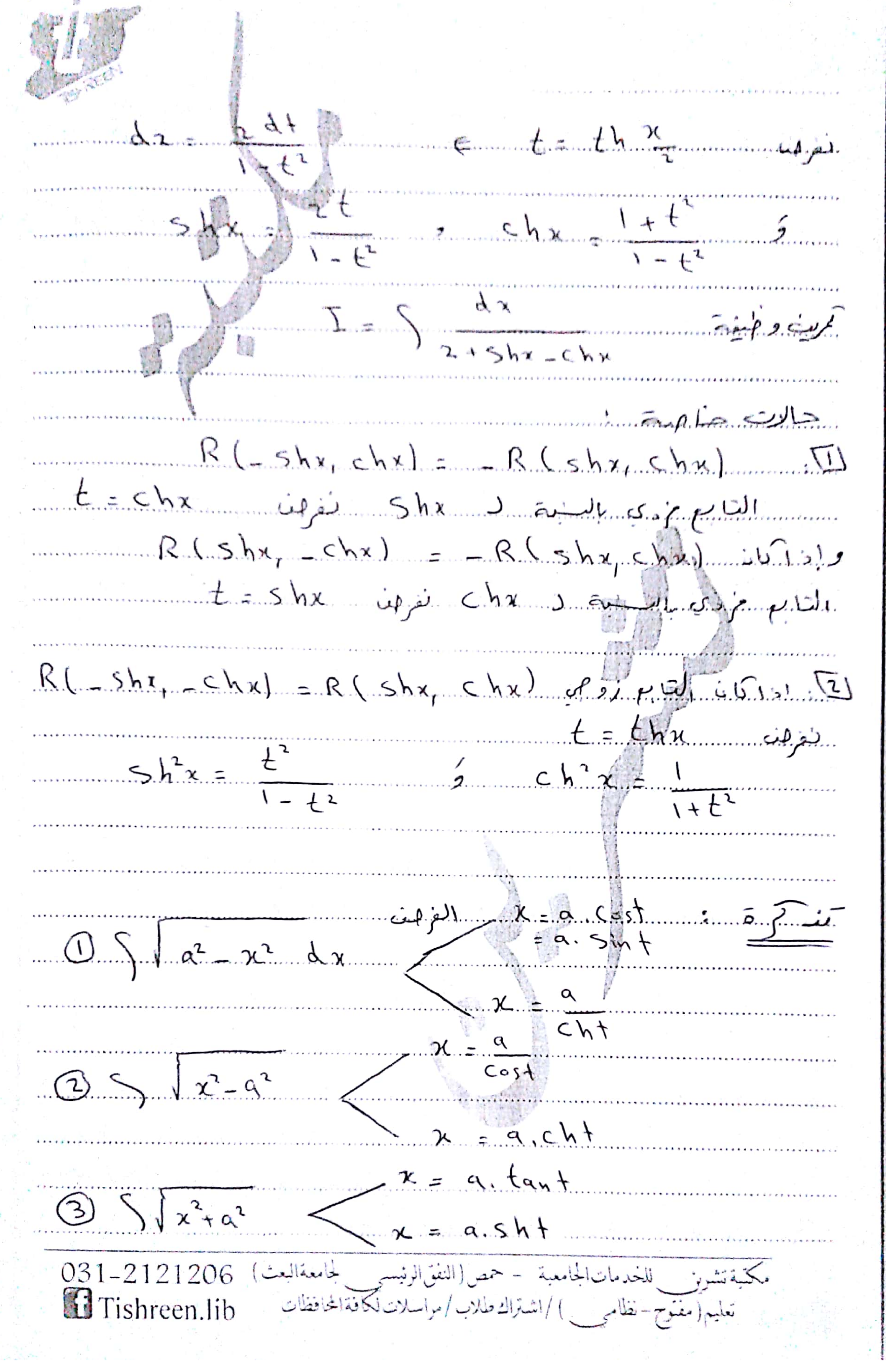
$J_n = \int \tan^{n-2}x \tan^2 x\,dx = \int \tan^{n-2}x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx$

$= \int \tan^{n-2}x \frac{1}{\cos^2 x} - \int \tan^{n-2}x\,dx$

⇒ $J_n = \frac{\tan^{n-1}x}{n-1} - J_{n-2}$

* تكاملات التوابع القطعية *

إذا كان التكامل بالشكل: $I = \int R(\text{sh}x, \text{ch}x)\,dx$



نفرض $t = th\frac{x}{2} \Leftarrow dx = \frac{2dt}{1-t^2}$

و $ch x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$, $sh x = \frac{2t}{1-t^2}$

تمرين وظيفة $I = \int \frac{dx}{2 + sh x - ch x}$

حالات خاصة :

1) $R(-sh x, ch x) = -R(sh x, ch x)$

التابع فردي بالنسبة لـ $sh x$ نفرض $t = ch x$

وإذا كان $R(sh x, -ch x) = -R(sh x, ch x)$

التابع فردي بالنسبة لـ $ch x$ نفرض $t = sh x$

2) إذا كان التابع زوجي $R(-sh x, -ch x) = R(sh x, ch x)$

نفرض $t = th x$

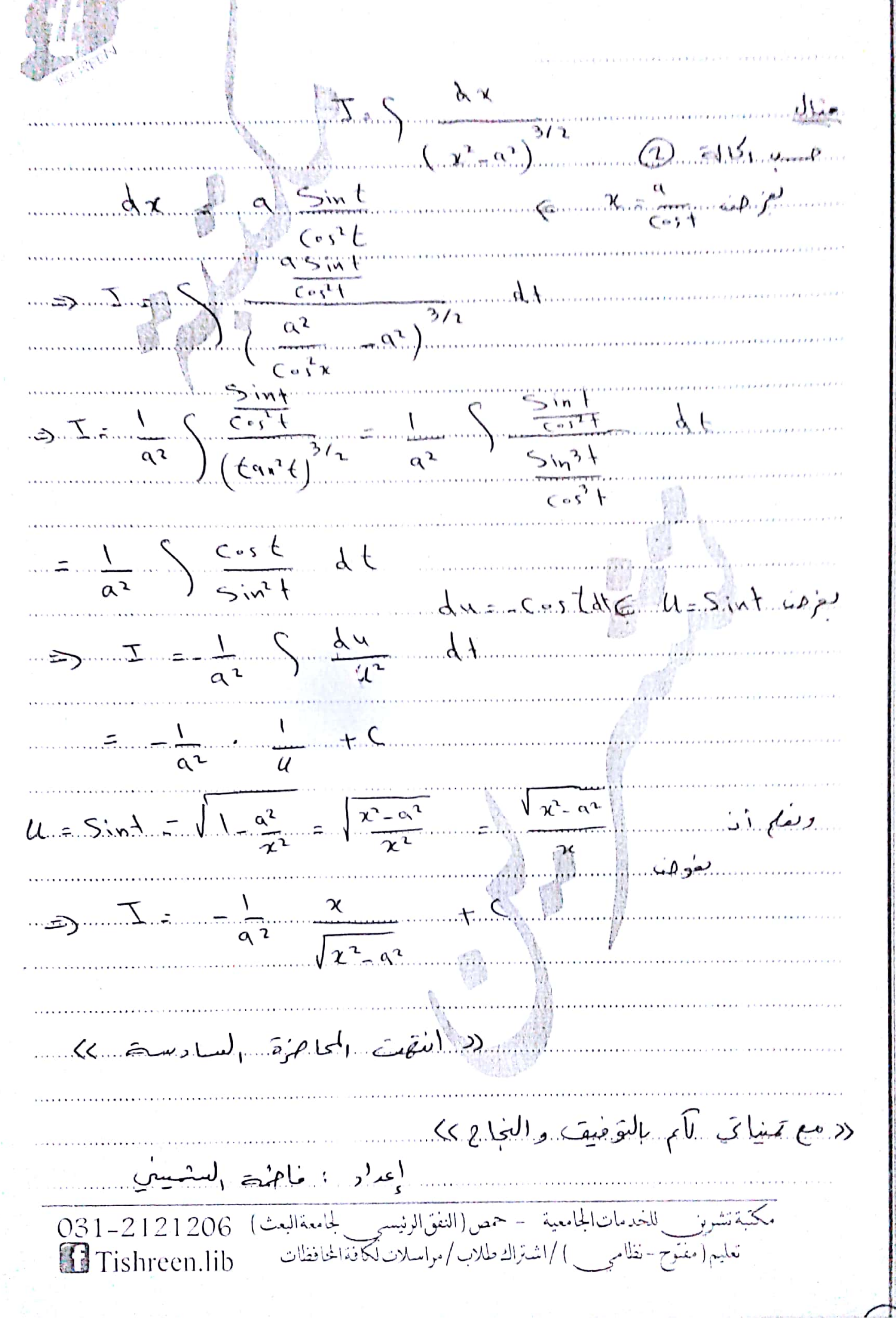
$ch^2 x = \frac{1}{1+t^2}$ و $sh^2 x = \frac{t^2}{1-t^2}$

تذكرة :

① $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ — الفرض $x = a.\cos t$ ، $= a.\sin t$ ، $x = \frac{a}{ch t}$

② $\int \sqrt{x^2 - a^2}$ — $x = \frac{a}{\cos t}$ ، $x = a.ch t$

③ $\int \sqrt{x^2 + a^2}$ — $x = a.\tan t$ ، $x = a.sh t$



مثال

$$I = \int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{3/2}}$$

حسب الحالة ②

نعوض $x = \frac{a}{\cos t} \Leftarrow dx = a\frac{\sin t}{\cos^2 t}$

$$\Rightarrow I = \int \frac{\frac{a\sin t}{\cos^2 t}}{\left(\frac{a^2}{\cos^2 x} - a^2\right)^{3/2}} dt$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{a^2}\int \frac{\frac{\sin t}{\cos^2 t}}{(\tan^2 t)^{3/2}} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\frac{\sin t}{\cos^2 t}}{\frac{\sin^3 t}{\cos^3 t}} dt$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt$$

نعوض $u = \sin t \Leftarrow du = \cos t\, dt$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{a^2}\int \frac{du}{u^2} dt$$

$$= -\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{u} + C$$

ونعلم أن $u = \sin t = \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^2-a^2}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$ نعوض

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} + C$$

« انتهت المحاضرة السادسة »

« مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح »

إعداد : فاطمة الشمسي